専門科目 (午前) **16　大修**

数理・計算科学 **時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時**

注意

1. 専門基礎問題，　問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択 し解答せよ.
2. 専門一般問題，　問 4,. . ., 問 12 より 3 問を選択 し解答せよ.
3. 解答は 1 問ごとに 別々の解答用紙に記入 せよ.
4. 要求されたより多くの問題に解答した場合は 採点されない 可能性がある.
5. 解答用紙ごとに必ず 問題の番号および受験番号 を記入せよ.

問 1 (基礎問題)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 行列 A と B それぞれの固有値，固有ベクトルを求めよ．

(2) $U'AU$ と $U'BU$ が同時に対角行列になるような直交行列 U を求めよ．ただし U' は行列 U の転置をあらわす．

(3) X を 2×2 実対称行列として，方程式

$$X^2 + AX + B = O$$

の解 X をすべて列挙せよ．

問 2 (基礎問題)

実係数多項式 $f(x)$ に対し，つぎは同値であることを証明せよ．

(1) $f(x)$ の次数は 2 以上．

(2) 任意の正数 $N > 0$ に対し，適当に実数 x_0 を選べば

$$|f(x_0) - f(x_0 + 1)| > N$$

がなりたつ．

問 3 (基礎問題)

ここでは，命題変数（$p, q, r, \ldots$）と論理結合子 $\wedge$，$\vee$，$\neg$，$\rightarrow$ から成る命題論理式を考える．これらの結合子の働きは次の真理値表で与えられる．

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$
true	true	true	true	true
true	false	false	true	false
false	true	false	true	true
false	false	false	false	true

A	$\neg A$
true	false
false	true

論理式 A 中の命題変数にどのように真理値を割り当てても A が true になるとき，A は「恒真（トートロジー）である」と言う．A を true にするような真理値割り当てが存在するとき，A は「充足可能である」と言う．命題変数そのものか命題変数に $\neg$ をひとつ付けた論理式を「リテラル」と呼ぶ．リテラルを $\wedge$ でつなげたものを $\vee$ でつなげた

$$(l_1^1 \wedge l_2^1 \wedge \cdots \wedge l_{k_1}^1) \vee (l_1^2 \wedge l_2^2 \wedge \cdots \wedge l_{k_2}^2) \vee \cdots \vee (l_1^m \wedge l_2^m \wedge \cdots \wedge l_{k_m}^m)$$

という形の論理式を「論理和標準形」と呼ぶ（ただし l_j^i はリテラルであり，m，$k_1, \ldots, k_m$ は 1 以上の整数である）．上の $\wedge$ と $\vee$ が交代した形，つまりリテラルを $\vee$ でつなげたものを $\wedge$ でつなげた形の論理式を「論理積標準形」と呼ぶ．

(1) 次の (1-1)〜(1-4) の論理式はそれぞれ（ア）恒真である,（イ）恒真ではないが充足可能である,（ウ）充足可能でない，のどの性質を持つか答えよ．解答はア，イ，ウを書くだけでよい．

(1-1) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
(1-2) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
(1-3) $(p \rightarrow (\neg p)) \wedge ((\neg p) \rightarrow p)$
(1-4) $(p \rightarrow (\neg p)) \vee ((\neg p) \rightarrow p)$

(2) 上の (1-1) の論理式と同値な論理和標準形と論理積標準形をそれぞれ書け．解答は標準形を書くだけでよい．

(3) 任意に与えられた論理和標準形が充足可能か否かを判定する，効率の良い方法を述べよ．ただしここで「効率が良い」とは，与えられた論理式の長さに対して計算の手間が指数関数のオーダーやそれ以上にはならない，ということである．解答は，その判定方法およびそれが正しく働くこと（正当性）と効率が良いことの説明を，簡潔に書くこと．

問 4 (一般問題)

集合 $S=\{1,2,3,4\}$ に，位相 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O}=\{\emptyset,\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\},S\}$$

により与え，S の部分集合 $\{1,3,4\}$ を M とおく．

(1) M の閉包 $\bar{M}$，内部 M°，境界 M^{a} を求めよ．

(2) M の相対位相 $\mathcal{O}_M$ を求めよ．

(3) $\mathcal{O}'=\{\emptyset,\{1\},\{1,3\},\{1,3,4\},S\}$ とおく．S の置換群 $\mathfrak{S}_4$ の元を S から S への写像とみなすとき，$(S,\mathcal{O})$ から $(S,\mathcal{O}')$ への連続写像となるものをすべて求めよ．

問 5 (一般問題)

G を位数 15 の群とする．このときシローの定理により G は位数 3 および位数 5 の元を含む．この事実を使って，以下を証明せよ．

(1) 位数 5 の元 h により生成される部分群 H は正規部分群である．

(2) G は巡回群である．

問 6 (一般問題)

H をヒルベルト空間，$(\ ,\ )$ をその内積，M を H の閉部分空間で H と異なるものとする．このとき 0 ではない H の元 z で，任意の $y \in M$ に対して $(z, y) = 0$ をみたすものが存在することを証明せよ．

問 7 (一般問題)

実数パラメータ c を含む以下の線形計画問題の主問題とその双対問題について考える.

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\text{(主問題) 目的:} & 2cx_1 & -2cx_2 & +(c+2)x_3 & +(3c-1)x_4 & \rightarrow & \text{最小化} \\
\text{条件:} & -x_1 & +2x_2 & -x_3 & -3x_4 & = & 4 \\
 & 3x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 & = & 0 \\
 & & & & \multicolumn{3}{r}{x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4).}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrcl}
\text{(双対問題) 目的:} & 4y_1 & & \rightarrow & \text{最大化} \\
\text{条件:} & -y_1 & +3y_2 & \leq & 2c \\
 & 2y_1 & -2y_2 & \leq & -2c \\
 & -y_1 & +2y_2 & \leq & c+2 \\
 & -3y_1 & +y_2 & \leq & 3c-1.
\end{array}
$$

(1) x_1, x_2 を基底変数，x_3, x_4 を非基底変数とする主問題の基底解と対応する目的関数値を求めよ.

(2) (1) で計算した基底解が最適解となるパラメータ c の範囲を求めよ.

(3) (2) で計算した範囲内で c が変化するとき，双対問題の最適解と最適値を c の関数として求めよ.

問 8 (一般問題)

$n\ (\geq 2)$ 個の確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ が，互いに独立に同一の指数分布 $\mathbf{P}\{X_i \leq x\} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, $x \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, に従っているものとする．ただし，$\mathbf{P}\{\cdot\}$ は事象 $\{\cdot\}$ の確率を表す．$X_1, \ldots, X_n$ を小さいほうから順に並べ替えて見たものを $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ と書くとき (したがって $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$，$X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ である)，以下の問に答えよ．

(1) $X_{(1)}$ の分布関数を求め，$X_{(1)}$ の分布が $\dfrac{X_n}{n}$ の分布と一致することを示せ．

(2) $\dfrac{X_{n-1}}{n-1} + \dfrac{X_n}{n}$ の分布関数を求めよ．

(3) 対称性を用いて，$x \geq y \geq 0$ のとき次の式が成り立つことを示せ．

$$\mathbf{P}\{X_{(2)} > x, X_{(1)} \leq y\} = n\,\mathbf{P}\Big\{\min\{X_i : i = 2, \ldots, n\} > x, X_1 \leq y\Big\}$$

(4) 上の結果を利用して，$X_{(2)}$ の分布が $\dfrac{X_{n-1}}{n-1} + \dfrac{X_n}{n}$ の分布と一致することを示せ．

問 9 (一般問題)

過去に麻薬を使用した人の割合 p を調査したいとする．もし

質問 A：「過去に麻薬を使用したことがありますか?」

に正直に答えると犯罪を認めることになりかねなく、 協力が得られない。こうした場合に使われる調査法に，次のようなものがある．まず表と裏が公平に出るコイン投げを，回答者に独立に二回してもらう．最初の結果を S, 二度目の結果を T とする．この結果は調査員に伏せておく．次に回答者に

質問 B：もし S が表 なら「過去に麻薬を使用したことがありますか」に答えて下さい，またもし S が裏ならば「二度目のコイン投げの結果 T は表でしたか」に答えて下さい．

に正直に 1 (yes) または 0 (no) で答えてもらう．当然，この回答だけからは使用歴は不明となる．質問 A に対する正直な回答を表す確率変数を X，質問 B に対する正直な回答を表す確率変数を Y とするとき，以下の質問に答えよ．

(1) 確率 $\mathbf{P}\{Y=1\}$ を求めよ．
(2) 条件付き確率

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{X=1 \mid Y=1\}, \quad \mathbf{P}\{X=0 \mid Y=1\}, \\ &\mathbf{P}\{X=1 \mid Y=0\}, \quad \mathbf{P}\{X=0 \mid Y=0\}, \end{aligned}$$

を求めよ．$Y=1$ の時，真の回答 X が 1 である可能性は，0 である可能性より高いか，低いか．
(3) n 人に質問 B を行い，正直かつ独立な回答 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ を得たとし，その標本平均を $\overline{Y}$ とする．平均値 $\mathbf{E}\{\overline{Y}\}$ を求めよ．この結果を用い、確率 p の不偏推定量 $\widehat{p}$ を与えよ．
(4) もし n 人から質問 A に対する正直かつ独立な回答 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を得ることができたとすると，その標本平均 $\overline{X}$ は，確率 p の不偏推定量を与える．$p \to 0$ のとき両推定量の分散の比

$$\frac{\mathrm{Var}\{\overline{X}\}}{\mathrm{Var}\{\widehat{p}\}}$$

はどうなるか．

問 10 (一般問題)

(1) 文字列 $w = w_1w_2\cdots w_n$ に対して w の順序を逆にした文字列 $w_n\cdots w_2w_1$ を w の逆文字列といい $w^{\mathcal{R}}$ と書く．例えば $w = abcd$ のとき $w^{\mathcal{R}} = dcba$ である．また，言語 A に対して逆文字列言語 $A^{\mathcal{R}} = \{w^{\mathcal{R}}|w \in A\}$ とする．A が正規 (注 1) ならば $A^{\mathcal{R}}$ も正規であることを示せ．

(2) アルファベット Σ:

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

を考える．このとき Σ^* に属する文字列の各行を 2 進数とみなし，

$$B = \{w \in \Sigma^* | w \text{ の 2 行目の値は 1 行目の値の 3 倍}\}$$

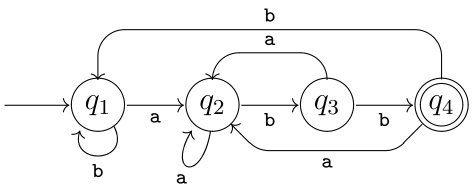
とする．たとえば，

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in B, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \notin B$$

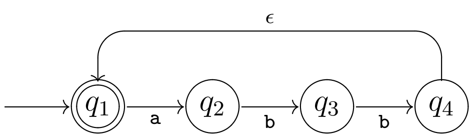
である．なぜなら，1001 は 11 の 3 倍であるが，10 は 1 の 3 倍ではないからである．言語 B の逆文字列言語を認識する 4 状態からなる**決定性**有限オートマトンの状態遷移図 (注 2) を与えよ．なお，空列 (文字をひとつも含まない文字列) は言語 B に含まれるものとする．

注 1: **正規言語**　言語 L を認識する決定性有限オートマトン (注 2)，あるいは非決定性有限オートマトン (注 3) が存在するとき，L は**正規**であるという．

注 2: 以下は，アルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ であるような言語 $\{w|w \text{ は } \mathtt{abb} \text{ で終わる}\}$ を認識する**決定性**有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理状態の集合は $\{q_4\}$ である．



注 3: 以下は，アルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ であるような言語 $\{w|w = (\mathtt{abb})^*\}$ を認識する**非決定性**有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理状態の集合は $\{q_1\}$ であり，ϵ ラベルがついた矢印は空文字に対する遷移を表す．



問 11 (一般問題)

あるプログラムの中で，1 以上 n 以下の自然数をランダムに何度も生成したかったとする．ただし，毎回の生成は独立で，しかも，あらかじめ与えられた自然数の列 $w_1, ..., w_n$ に対し，各自然数 k が生成される確率を $p_k = w_k / \sum_{i=1}^{n} w_i$ としたい．

そこで，呼び出される度に，1 以上 n 以下の自然数を，上記の生成確率でランダムに 1 つ返す手続き `wrand()` を考える．この手続きを実現するアルゴリズムについて以下の問いに答えよ．ただし，$w_1, ..., w_n$ と n の間には特に関係を仮定しないので，各 w_i が n に比べて非常に大きな数になる場合もありえることを想定して答えること．なお，`wrand` の値域を指定する n は変数 `N` に，列 $w_1, ..., w_n$ は配列 `W[1..N]` に与えられており，これらの変数を手続き `wrand` 内から参照できるものとしてよい．

(1) 任意の自然数 m に対し，`rand`(m) を実行すると，1 以上 m 以下の自然数をランダムかつ等確率に 1 つ返す理想的な乱数生成手続き `rand` を仮定する．この `rand` を利用し，目標の手続き `wrand` を実現するアルゴリズムで，計算時間や使用メモリ量の観点から，できるだけ効率のよいものを示せ．解答では，`wrand` の 1 回の実行の <u>最悪時</u> の効率を考えればよく，最悪時の計算時間や使用メモリ量がオーダー的によいものを示せばよい．また，毎回の実行効率を上げるために，`wrand` の実行に先立って前処理を行っても構わない．その場合には，どのような前処理を行うかも別途記述しておくこと．なお，アルゴリズムの記述は，通常の手続き型言語風（例：C 言語風，Pascal 風，Java 風）のものであれば何でもよい．また，たとえば整数型の 1 変数が保持できる数の大きさの上限などは，特に考えなくてもよい．

(2) `wrand` の 1 回の実行にかかる最悪時の計算時間を，パラメータ $n, w_1, ..., w_n$ に対するオーダー記法で評価せよ．ただし，議論を簡単にするため，変数の参照，変数への代入，四則演算，大小比較などの基本操作，ならびに `rand` の 1 回の実行は，すべて 1 単位時間に行えるものと仮定する．

問 12 (一般問題)

(1) コンピュータの仮想記憶の管理に使われる LRU (Least Recently Used) アルゴリズムを説明せよ.

(2) 次のようなプログラムを走らせることを考える.

```
for (i = 0; i < N; ++i) {
    p = data[i];
    q = data[0];
    data[0] = p + q;
}
```

ここで定数 N は正の奇数，変数 data は長さ N の配列を表すとする．この配列の個々の要素は異なる論理ページに配置されているとする．このとき仮想記憶の管理に FIFO (First-In First-Out) または LRU アルゴリズムを採用したとして，それぞれの場合についてページフォールトの発生率を計算せよ．物理メモリのページ数は 2 とする．計算にあたっては，変数 data の読み書きにともなうページフォールト以外は無視してよい．例えば，他の変数の読み書きにともなうページフォールトは考慮しなくてよい．物理メモリの初期状態など，問題設定上，あいまいな点については適当に決めて計算してよい．その場合はどのように決めたか解答に明記すること．

(3) 仮想記憶の実装に真の LRU を使うのは難しく，専用のハードウェア機構を用いて疑似的に実装することが多い．そのようなハードウェア機構の例を示し，それを用いた疑似 LRU の実装方法を説明せよ．