専門科目 (午前)

17　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意

1. 専門基礎問題，　問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択 し解答せよ.
2. 専門一般問題，　問 4,. . ., 問 12 より 3 問を選択 し解答せよ.
3. 解答は 1 問ごとに 別々の解答用紙に記入 せよ.
4. 要求されたより多くの問題に解答した場合は 採点されない 可能性がある.
5. 解答用紙ごとに必ず 問題の番号および受験番号 を記入せよ.

問 1 (基礎問題)

$\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ を n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の m 個のベクトルとする．ただし，$n \geq m \geq 3$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ が線形独立であることの定義を記せ．

(2) $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ が線形独立であれば，m 個のベクトル $\boldsymbol{a}^1 + \boldsymbol{a}^2, \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^3, \boldsymbol{a}^3, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ は線形独立であることを示せ．

(3) $\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}^2, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ が線形独立，かつ，m が奇数であれば，m 個のベクトル $\boldsymbol{a}^1 + \boldsymbol{a}^2, \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{a}^3, \ldots, \boldsymbol{a}^{m-1} + \boldsymbol{a}^m, \boldsymbol{a}^m + \boldsymbol{a}^1$ は線形独立であることを示せ．

問 2 (基礎問題)

xy 平面から原点を除いた領域 $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x, y) \neq (0, 0)\}$ で定義された関数

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

について，以下の設問に答えよ．

(1) $x = 0$ で定義された直線に沿って点 (x, y) が原点に近づくときの $f(x, y)$ の極限を求めよ．

(2) k を定数とし，$y = kx$ で定義される直線に沿って点 (x, y) が原点に近づくとき，$|f(x, y)|$ は $+\infty$ に発散することを示せ．

(3) 任意の実数 a に対して，原点に近づく R の点列 $((x_n, y_n) \in R \,|\, n \geq 1)$ で

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = a$$

となるものが存在することを示せ．

問 3 (基礎問題)

整数の有限列に対して,「列中に隣り合って出現する整数で

$$(\text{左の値}) > (\text{右の値})$$

となっている一組を選び，その左右の位置を交換する」という操作を簡約と呼び，$\to$ で表す．たとえば

$$\langle 2, \underline{8, 3}, 1, 5\rangle \to \langle 2, 3, \underline{8, 1}, 5\rangle \to \langle 2, \underline{3, 1}, 8, 5\rangle \to \langle 2, 1, 3, \underline{8, 5}\rangle \to \langle 2, 1, 3, 5, 8\rangle$$

という簡約の列（下線は交換位置を表す）が存在する．以後 α，β などは整数の有限列を表す．交換可能な隣接要素の組が複数出現することがあるので，α に対して $\alpha \to \beta$ となる β は一般に複数ある．交換可能な隣接要素の組が存在せず簡約を施すことができない整数列のことを，既約形と呼ぶ．たとえば $\langle 1, 2, 3, 5, 8\rangle$ は既約形である．α に簡約を n 回連続して施して β が得られたとき，

$$\alpha \xrightarrow{n} \beta$$

と書く．たとえば $\langle 2, 8, 3, 1, 5\rangle \xrightarrow{4} \langle 2, 1, 3, 5, 8\rangle$ である（上の簡約の列がこれを表している）.

(1) 一つの α から始まり，二通り以上の異なる簡約の列によって同じ既約形に至る場合がある．そのような整数列 α を一つ挙げ，α から既約形に至る簡約の列を具体的に二通り書け.

(2) $\alpha \xrightarrow{1} \beta$，$\alpha \xrightarrow{1} \gamma$ ならば，次の三条件のうちの少なくとも一つが成り立つことを示せ.

- $\beta = \gamma$.
- $\beta \xrightarrow{1} \delta$，$\gamma \xrightarrow{1} \delta$ となる δ が存在する.
- $\beta \xrightarrow{2} \delta$，$\gamma \xrightarrow{2} \delta$ となる δ が存在する.

(3) τ を既約形とする．$n \geq 0$，$\alpha \xrightarrow{n} \tau$ ならば，α に簡約を連続してどのように施していっても，必ず n 回で τ に至る（すなわち，交換位置の選び方によらず α から n 回未満の簡約では既約形に至らずちょうど n 回の簡約でいつでも τ に至る）ことを証明せよ.（ヒント：n に関する帰納法で，(2) も使って示せばよい.）

問 4 (一般問題)

X を完備距離空間，d をその距離とし，写像 $f : X \to X$ が任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(f(x),\, f(y)) \leq \frac{1}{2} d(x,\, y)$$

をみたすとする．このとき $x_0 \in X$ を初期点とし $x_n = f(x_{n-1})$ で定義される X の点列 $(x_n)_{n \geq 0}$ は，縮小写像の原理により f の不動点 x_∞ に収束する．X の別の点列 $(y_n)_{n \geq 0}$ が，(i) $y_0 = x_0$, および (ii) 正数列 $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ が存在し $d(y_n, f(y_{n-1})) \leq \varepsilon_n$, という 2 条件をみたすとき，つぎを示せ.

(1) $\quad d(y_n,\, x_n) \leq \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon_{n-i}}{2^i}.$

(2) 数列 $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ が 0 に収束するとき，$(y_n)_{n \geq 0}$ は x_∞ に収束する.

（ヒント：(ε_n) の収束を ε-δ 法で表現し (1) の右辺を二つの和に分ける.）

問 5 (一般問題)

(1) 位数 4 の群を，同型を除いてすべて求めよ．

(2) (1) で求めた群の自己同型群は互いに同型となるか．ただし，群 G の自己同型群とは，集合 $\{g : G \to G \mid g$ は同型写像$\}$ 上で写像の合成を演算とする群を意味する．

問 6 (一般問題)

次の偏微分方程式の初期値境界値問題の解 $u(x,t)$ を求めよ.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = x(\pi - x) & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

また $\lim_{t\to\infty} e^t u(x,t)$ を求めよ.

問 7 (一般問題)

ある会社では、2 つの倉庫（倉庫 i $(i=1,2)$ ）から 4 つの店（店 j $(j=1,2,3,4)$ ）へ商品を補給することにした。商品は 1 種類で、配送費用として倉庫 i から店 j へ 1 単位の商品を送るごとに c_{ij} の費用がかかる。各店に送るため倉庫 i には a_i の量の商品がストックされ、店 j は b_j の量の商品を必要としている。ただし $a_1+a_2=b_1+b_2+b_3+b_4$ である。この会社では全体の配送費用を最小にするように、すべての可能な i,j の組み合わせに対して 倉庫 i から店 j へ送る商品の量 x_{ij} を決めたい。

(1) この問題を線形計画問題として定式化せよ。

(2) いま、$a_1=17,\ a_2=15,\ b_1=6,\ b_2=8,\ b_3=10,\ b_4=8$ であり、費用係数 c_{ij} は、次の表の通りであるものとする。この線形計画問題を解き、各倉庫から各店への最適な配送量を求めよ。

	店 1	店 2	店 3	店 4
倉庫 1	3	4	6	4
倉庫 2	2	3	8	5

(3) このタイプの線形計画問題は輸送問題と呼ばれ、各 $a_i,\ b_j$ が $a_1+a_2=b_1+b_2+b_3+b_4$ をみたす正整数であるとき、すべての x_{ij} が整数であるような最適解が存在する。この性質がなぜ成り立つのか説明せよ。

問 8 (一般問題)

値 $\{0,1,2,\ldots\}$ をとる二つの離散値確率変数 X, Y の同時確率関数を $p(i,j),\ i,j=0,1,2,\ldots,$ とする。簡単のために全ての i,j で $p(i,j)>0$ と仮定する。X と Y の周辺確率関数をそれぞれ

$$p_1(i)=\sum_{j=0}^{\infty}p(i,j),\quad p_2(j)=\sum_{i=0}^{\infty}p(i,j)$$

と置き、$X=i$ という条件の下での Y の条件付き確率関数を

$$q(j\mid i)=p(i,j)/p_1(i)$$

とする。i を固定したときの $q(j\mid i),\ j=0,1,2,\ldots,$ の期待値

$$M(i)=\sum_{j=0}^{\infty}jq(j\mid i)$$

を「$X=i$ という条件の下での Y の条件付き期待値」と呼び、$\mathbf{E}\{Y\mid X=i\}$ と表す。

(1) X と Y が独立ならば $M(i)=\mathbf{E}\{Y\}$ となることを証明せよ。

(2) 関数 $M(i)$ に確率変数 X を代入した $M(X)$ を「X による Y の条件付き期待値」と呼び、慣用的に $\mathbf{E}\{Y\mid X\}$ と表現する。$\mathbf{E}\{\mathbf{E}\{Y\mid X\}\}=\mathbf{E}\{Y\}$ となることを証明せよ。

(3) ある都市ではひと月に X 回の交通事故が起き、一回の事故で N 人が死亡するという。X 回の事故で死ぬ人の数をそれぞれ $N_1,N_2,\ldots,N_X$ (N_i は全て N と同一の分布に従い、X と独立とする) とし、ひと月の総死亡者数 $\sum_{k=1}^{X}N_k$ を Y と置く。ただし $X=0$ の時は $Y=0$ とする。$X=i,\ i=0,1,2,\ldots,$ の時の Y の条件付き期待値 $\mathbf{E}\{Y\mid X=i\}$ が $i\mathbf{E}\{N\}$ となることを証明せよ。これを用いて $\mathbf{E}\{Y\}=\mathbf{E}\{X\}\mathbf{E}\{N\}$ となることを証明せよ。

問 9 (一般問題)

(1) 期待値 $\mu > 0$ の指数分布に従う確率変数 X を考える．分布関数は $F(x) = 1 - \exp(-x/\mu)$, $x > 0$ である．X の観測値 x から μ を区間推定することを考える．信頼係数を $0 < \beta < 1$ として，$(0, ax)$ という形の μ の信頼区間を求めよ．

ヒント: 次式を満たす実数 a を β を使って表せばよい．

$$\Pr\{\mu \in (0, aX)\} = \beta$$

(2) 確率変数 X_1, X_2 は互いに独立に期待値 μ_1, μ_2 の指数分布に従うものとする．その観測値を x_1, x_2，信頼係数を $0 < \beta < 1$ として，$(0, a_1 x_1) \times (0, a_2 x_2)$ という形の μ_1, μ_2 の信頼域を求めよ．

ヒント: 次式が成立するような実数 a_1, a_2 の満たすべき条件を β を使って表せばよい．

$$\Pr\{(\mu_1, \mu_2) \in (0, a_1 X_1) \times (0, a_2 X_2)\} = \beta$$

(3) (2) で求めた信頼域の面積を最小にする a_1, a_2 を求めよ．

問 10 (一般問題)

アルファベット $\{0, 1\}$ 上の言語 A, B, C, D を以下のように定義する．

$$A = \{w | w \text{ は } 001 \text{ を含む }\}$$

$$B = \{w | w \text{ は } 001 \text{ を含まない }\}$$

$$C = \{w | w \text{ 中の } 0 \text{ と } 1 \text{ の個数は等しい }\}$$

$$D = \{w | w \text{ 中の } 0 \text{ と } 1 \text{ の個数は等しくない }\}$$

これらの言語について以下の問に答えよ．

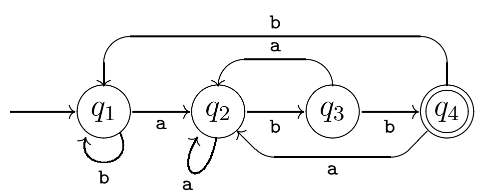
(1) 言語 A, B, C, D について，各々，正規であるか正規でないかを答えよ．

(2) (1) で正規であると答えた言語について，各々，その言語を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 1) を与えよ．

(3) (1) で正規であると答えた言語について，各々，その言語を表す正規表現 (注 2) を与えよ．

(4) (1) で**正規でない**と答えた言語について，各々，その言語が正規でないことを示せ．必要ならばポンピング補題 (注 3) を用いてよい．

注 1:　以下は，アルファベット $\{a, b\}$ 上の言語 $\{w | w \text{ は } abb \text{ で終わる }\}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1，受理状態は q_4 である．



注 2:　以下は，アルファベット $\{a, b\}$ 上の言語 $\{w | w \text{ は } abb \text{ で終わる }\}$ を表す正規表現の例である．

$$(a \cup b)^* abb$$

注 3:　ポンピング補題: 言語 L が正規であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 3 つの部分 $s = xyz$ に分割できる:

1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表わし，y^i は y を i 回連結したものを表す．y^0 は空列 ε (文字を 1 つも含まない文字列) となる．

問 11 (一般問題)

入力文，出力文と代入文との列からなる簡単なプログラミング言語をコンパイルすることを考える．

［プログラム１］

```
read hour;
read minute;
hourend = 17;
minuteend = 15;
print 60*hourend+minuteend-(60*hour+minute);
```

「read ...」は入力した値を変数に入れる文で入力文と呼ぶ．入力文のオペランドは変数とする．「print ...」は算術式の値を出力する文で出力文と呼ぶ．出力文のオペランドは算術式とする．「... = ... 」は代入文である．代入文の左辺は変数，代入文の右辺は算術式とする．扱う数は整数のみとする．余分な空白や改行は意味をもたない．

(1) このプログラミング言語の文法のうち，出力文に関する部分は次のようになっている．

$$
\begin{array}{lcl}
P & \to & \texttt{print}\ E\ ; \\
E & \to & E\ \texttt{+}\ T \mid E\ \texttt{-}\ T \mid T \\
T & \to & T * F \mid F \\
F & \to & (\ E\ ) \mid \underline{\mathrm{id}} \mid \underline{\mathrm{num}}
\end{array}
$$

ここで， ;，+， -， *，(，)，予約語 print，変数 $\underline{\mathrm{id}}$, 数 $\underline{\mathrm{num}}$ は終端記号である．

出力文「print 60*hourend+minuteend-(60*hour+minute);」について，上の構文規則を用いて，P を根とする（部分的）構文解析木を描け．

(2) 冒頭の［プログラム１］をコンパイルして目的コードを出したい．次の例を参考にして,［プログラム１］の目的コードとメモリ配置を書け．目的コードは素朴なものでよく，最適化をしなくてよい．次の例のように適宜説明を加えよ．

［例］同じプログラミング言語のソースプログラム

```
read a;
b = 123;
print a*b;
```

この目的コード（//から行末はコメント）：

```
call read        // サブルーチン read は入力した値をレジスタ%1 に返す
st   %1, a       // read a;
ld   num123, %1
st   %1, b       // b = 123;
ld   a, %1
ld   b, %2
mul  %1, %2, %1  // %1 = a*b;
call print       // print a*b; サブルーチン print はレジスタ%1
                 // の内容を印刷する
```

このときのメモリ配置：

num123: 123 の２進表現
a: 変数 a の値
b: 変数 b の値

ここで用いる計算機は簡単な RISC アーキテキチャのものであって，命令として用いることができるのは，次の形のものだけとする．

命令形式	意　味
`ld` *address*, *%reg1*	*address* 番地の内容を*%reg1* にロードする
`st` *%reg1*, *address*	*%reg1* を *address* 番地へストアする
`add` *%reg1*, *%reg2*, *%reg3*	*%reg1* + *%reg2* の結果を*%reg3* へしまう
`sub` *%reg1*, *%reg2*, *%reg3*	*%reg1* − *%reg2* の結果を*%reg3* へしまう
`mul` *%reg1*, *%reg2*, *%reg3*	*%reg1* × *%reg2* の結果を*%reg3* へしまう
`mov` *%reg1*, *%reg2*	*%reg1* の値を*%reg2* へしまう．*%reg1* の値は変らない．
`call read` または `print`	サブルーチン `read` または `print` を呼ぶ．`read` は読んだ値を`%1` レジスタに返し，`print` は`%1` レジスタの内容を印刷する．

（注）「`ld 123,%1`」と書いても`%1` レジスタに定数 123 は入らないので注意．`add` や `sub` や `mul` のオペランドに定数値を直接書くことはできない． *%reg1* などは整数型のレジスタで`%1`〜`%15` が使えるとする．*%reg1*, *%reg2*, *%reg3* が同じレジスタでもよい．

(3) (2) で解答した目的コードとメモリ配置を最適化して書き下せ．この最適化された目的コードとメモリ配置は，［プログラム１］の外から見た振舞い，つまり，最初に２つの値を入力して最後にしかるべき１つの値を出力すること，を満たしていればよいとする．それを満たす範囲で，(i) 実行する命令の数，(ii) 使用するレジスタの数， (iii) メモリに置く値，をできるだけ減らせ．

一般にコンパイラにおける最適化では，すべての項目を最適にすることができないことがあるので，(i)，(ii)，(iii) に適当な優先順位をつけてもよいが，その場合はどのような優先順位をつけたかを述べよ．

問 12 (一般問題)

クリティカルセクション (critical section) とは、同時に 1 個のスレッド (やプロセス) しか実行できないプログラム領域のことである。今、スレッドが 2 個しか存在しないと仮定し、スレッド番号を 0 と 1 とする。次に示すのは、そのようなスレッド用のクリティカルセクションの簡単な実装例である。

```
flag[i] = true;
turn = j;
while (flag[j] && turn == j) {
    /* 何もしない */
}

＜クリティカルセクションのコード＞

flag[i] = false;
```

ここで、変数 `turn` と `flag` は 2 個のスレッドの間で共有されているとする。一方、変数 `i` と `j` はスレッドごとに異なる値をとり、スレッド 0 の場合は `i` の値は 0 で `j` の値が 1、スレッド 1 の場合は `i` の値が 1 で `j` の値が 0 になるとする。

(1) このプログラムの中の `while` 文の条件式から `&& turn == j` を取り除いた場合に、どのような状況で、どのような不都合が生じるか具体的に説明せよ。

(2) 元のプログラムの 2 行目を `turn = i;` に書き換えた場合に、どのような状況で、どのような不都合が生じるか具体的に説明せよ。