専門科目 (午前) **18 大修**

数理・計算科学 **時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時**

注意

1. 専門基礎問題, 問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択 し解答せよ.
2. 専門一般問題, 問 4,. . ., 問 12 より 3 問を選択 し解答せよ.
3. 解答は 1 問ごとに 別々の解答用紙に記入 せよ.
4. 要求されたより多くの問題に解答した場合は 採点されない 可能性がある.
5. 解答用紙ごとに必ず 問題の番号および受験番号 を記入せよ.

問 1 (基礎問題)

実数 t に対して，連立一次方程式

$$\begin{pmatrix} 5t & 2+2t & 1+t \\ 1+t & 1 & 1+t \\ 2+t & t & 1+3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考える．

(a) $t = -1$ のとき，この連立一次方程式を解き，解を求めよ．

(b) $t = 0$ のとき，この連立一次方程式の解は一意ではないことを示し，そのすべての解を適当なパラメータを用いて表せ．

(c) t が $-\infty$ から ∞ まで動いたとき，この連立一次方程式がもつ解の数がどのように変化するか示せ．

問 2 (基礎問題)

α と β を正の実数とし，実数上の関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(|x|^\alpha)}{|x|^\beta} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

と定義するとき，以下の設問に答えよ.

(1) $f(x)$ が $x = 0$ で連続となるための α, β に関する必要十分条件を求めよ.

(2) $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能となるための α, β に関する必要十分条件を求めよ.

問 3 (基礎問題)

以下では 2 人以上の競技者間の総当り戦を考える．右図のような総当り戦の結果において，x が y に勝ったことを $x \to y$ と表わすことにする．総当り戦の結果なので，すべての競技者 $x \neq y$ に対し，$x \to y$ または $y \to x$ のいずれかが成り立つ点に注意．なお，$x \to x$ は常に不成立とする．たとえば，右図の結果では，$\mathrm{a} \to \mathrm{b}$ だが，$\mathrm{b} \to \mathrm{a}$ ではない．

総当り戦の結果に対し，その総当り戦における「覇者」を次のように定義する．(ただし V は参加競技者全体の集合とする．)

	a	b	c	d	e
a	–	○	○	×	×
b		–	○	○	○
c			–	○	○
d				–	○
e					–

図：総当り戦の結果

$$x \text{ が覇者} \iff \forall y \in V - \{x\}\ [\ x \to y\ \vee\ \exists z \in V\ [x \to z \wedge z \to y]\ ].$$

以下の問いに答えよ．

(1) 総当り戦の結果に対し，競技者を各々 1 つの頂点とし，各頂点対 x, y 間には，勝った方から負けた方に有向辺を引いたグラフを考える．これを，その総当り戦の「試合結果グラフ」とよぶことにする．上図の総当り戦に対する試合結果グラフを示し，覇者をすべてあげよ．

(2) 覇者の定義に，試合結果グラフ上の性質としての解釈を与えよ．

(3) 総当り戦の結果に対し「真の覇者」を次のように定義する．

$$x \text{ が真の覇者} \iff \forall y \in V - \{x\}\ [\ x \to y\ ].$$

すべての総当り戦では覇者が必ず 1 人以上いることが知られているが，その事実を使い，真の覇者がいない総当り戦では，覇者が必ず 2 人以上いることを証明せよ．

論理式に関する補足：

論理式 $\forall x \in A\ [\ \cdots\ ]$ は「すべての $x \in A$ に対して $\cdots$ が成り立つ」という意味．たとえば，

$\forall y \in V - \{x\}\ [\ x \to y\ ]$ は「すべての $y \in V - \{x\}$ に対して，$x \to y$ が成り立つ」という意味

である．

問 4 (一般問題)

a を $a > 1$ をみたす実数とし，$C[0,a]$ を区間 $[0,a]$ 上の連続関数からなる集合とする．$u \in C[0,a]$ に対し

$$\|u\| = \sup_{0 \le t \le a} |u(t)|$$

と定め，写像 $T : C[0,a] \to C[0,a]$ $(u \to Tu)$ を

$$(Tu)(t) = 1 + \frac{1}{a}\int_0^t u(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$$

とおくとき，以下の設問に答えよ．

(1) T は $d(u,v) = \|u - v\|$ により定まる $C[0,a]$ 上の距離 d に関して縮小写像である事を示せ．ただし， $u - v$ は $u(t) - v(t)$ で定まる $[0,a]$ 上の連続関数である．

(2) T の不動点を求めよ．

問 5 (一般問題)

G を位数 8 の非可換群，$h \in G$ を位数 4 の元，H を h が生成する G の部分群とするとき，以下の設問に答えよ．

(1) G は H に含まれない元 $k \in G - H$ と $h \in H$ の 2 元で生成されることを示せ．

(2) H の元 h^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ に対して $f(h^i) = kh^ik^{-1}$ と定義すると，写像 f は H から H への準同型写像であり，さらに $f(h) = h^3$ であることを示せ．

問 6 (一般問題)

偏微分方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \ge 0 \end{cases} \tag{P}$$

が古典解 $u(x,t)$ を持つとき，以下の設問に答えよ．ただし，古典解とは (P) をみたす $\{\,(x,t)\,;\, t \ge 0,\ 0 \le x \le 1\,\}$ 上の C^2 級関数を意味する．

(1) $E(t) = \displaystyle\int_0^1 \left(u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)\right)\, dx$ とおくとき，$E(t) = E(0)$ が成立することを示せ．

(2) (1) を用いて，(P) の古典解は唯一つであることを示せ．

問 7 (一般問題)

以下の線形計画問題について考える.

$$\begin{array}{lrrrcr}
\text{maximize} & x_1 & +2x_2 & +x_3 & & \\
\text{subject to} & 3x_1 & +6x_2 & +2x_3 & \leq & 11 \\
 & & +x_2 & & \leq & 1 \\
 & x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq & 5 \\
 & \multicolumn{5}{l}{x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3)}
\end{array}$$

(1) この問題の双対問題を記せ.

(2) シンプレックス法を適用し、最適基底解を１つ計算し，最適値を求めよ.

(3) すべての最適基底解を求めよ.

(4) 双対問題の最適解を１つ求めよ.

問 8 (一般問題)

X, Y を非負の実数値確率変数，F_X, F_Y をそれぞれの分布関数として次の問いに答えよ．ただし本問では，積分と期待値の順序の交換は特に断らなくてもできるものとする．たとえば，

$$\mathrm{E}\Big(\int_0^\infty I\{X > x\}\,\mathrm{d}x\Big) = \int_0^\infty \mathrm{E}(I\{X > x\})\,\mathrm{d}x \tag{*}$$

である．ここに $\mathrm{E}(\cdot)$ は期待値を表し，$I\{X > x\}$ は，$X > x$ のとき 1，$X \leq x$ のとき 0 の値をとる確率変数を表す.

(1) $\mathrm{E}(I\{X > x\}) = 1 - F_X(x)$ であることを示せ.

(2)

$$X = \int_0^X 1\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty I\{X > x\}\,\mathrm{d}x$$

と表せるので，(*) 式と (1) の結果から

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}x$$

が成り立つことが分かる．これと同様にして，任意の $a \geq 0$ に対して $\max(X - a, 0) = (X - a)\,I\{X > a\}$ と表せることから，次が成り立つことを示せ.

$$\mathrm{E}(\max(X - a, 0)) = \int_a^\infty (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}x$$

(3) $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y)$ であるとし，ある $t > 0$ が存在して，$x < t$ のとき $F_X(x) \leq F_Y(x)$，$x \geq t$ のとき $F_X(x) \geq F_Y(x)$ とする．(2) を用いて，任意の $a \geq 0$ に対して $\mathrm{E}(\max(X - a, 0)) \leq \mathrm{E}(\max(Y - a, 0))$ が成り立つことを示せ．($a \geq t$ の場合と $a < t$ の場合を分けて考える．)

問 9 (一般問題)

A, B 二人がじゃんけんの勝負をする。二人が 「ぐう」,「ちょき」 を出す確率は同一で、それぞれ p, q とする。二人が全部で N 回の勝負を独立に行ったとき、勝敗の結果の回数は次の表のようになった。

	A が「ぐう」	A が「ちょき」	A が「ぱー」
B が「ぐう」	N_{11}	N_{12}	N_{13}
B が「ちょき」	N_{21}	N_{22}	N_{23}
B が「ぱー」	N_{31}	N_{32}	N_{33}

(1) 一回の勝負で、二人が出す手は独立とする。データ $\{N_{ij}\}$ の尤度関数 $L(p,q)$ を求めよ。また p, q の最尤推定量を求めよ。

(2) 勝負の結果が、A の勝った回数 K、B の勝った回数 L、引き分けた回数 $N-K-L$ しか分からないとする。一回の勝負で A が勝つ確率 P を求めよ。尤度関数が P だけの関数として表せることを示せ。また尤度関数を最大にする P の値を求めよ。

Remark for foreign applicants: “じゃんけん” (rock-paper-scissors) is a game using fists. Possible hands are “ぐう” (rock), “ぱー” (paper), and “ちょき” (scissor). “ぐう” wins against “ちょき”, “ちょき” wins against “ぱー”, and “ぱー” wins against “ぐう”. The same hands become a draw.

問 10 (一般問題)

アルファベット $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ 上の言語 A, B, C_n, D を以下のように定義する．

$A = \{w | w$ の長さは 2 の倍数 $\}$
$B = \{w | w$ の長さは 3 の倍数ではない $\}$
$C_n = \{w | w$ の長さは n の倍数 $\}$
$D = \{w | w$ は $\mathtt{0}$ と $\mathtt{1}$ を $5m$ 個ずつ含む．ただし $m \geq 0\}$

これらの言語について以下の問いに答えよ．

(1) 言語 A と言語 B の正規表現 (注 1) をそれぞれ与えよ．

(2) 任意の $n \geq 1$ に対して，言語 C_n を認識する決定性有限オートマトンの形式的な定義 (注 2) を与えよ．

(3) 言語 D が正規でないことをポンピング補題 (注 3) を用いて示せ．

注 1: 以下は，アルファベットが $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ であるような言語 $\{w | w$ は $\mathtt{a}$ で始まり $\mathtt{b}$ で終わる $\}$ に対する正規表現の例である．

$\mathtt{a}(\mathtt{a} \cup \mathtt{b})^*\mathtt{b}$

注 2: 決定性有限オートマトンは以下の 5 つ組 $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ である．

1. Q は状態の集合 (有限集合)
2. Σ はアルファベット (有限集合)
3. $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ は状態遷移関数
4. $q_0 \in Q$ は開始状態
5. $F \subseteq Q$ は受理状態の集合

注 3: ポンピング補題: 言語 L が正規言語であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 3 つの部分 $s = xyz$ に分割できる:

1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表わし，y^i は y を i 回連結したものを表わす．y^0 は空列 ε (文字を 1 つも含まない文字列) となる．

問 11 (一般問題)

1, 2, 3 の 3 通りの目が出るサイコロを使った単純な双六ゲームを考える．サイコロを振って，1 が出れば一つ先，2 が出れば二つ先，3 が出れば三つ先のマスへ進む．初期位置からはじめて，n 番目のマスへ至るサイコロの出目の系列の総数を S_n とする．たとえば，3 番目のマスへ至る出目の系列は，次の 4 通りがあるので，$S_3 = 4$ となる．

1, 1, 1
1, 2
2, 1
3

(1) $S_n (n \geq 1)$ を漸化式を用いて定義せよ．

(2) $n \geq 1$ なら $S_n < 2^n$ が成り立つことを示せ．

(3) 時間計算量 $O(n)$ で $S_n (n \geq 1)$ を計算するアルゴリズムを記述し，その時間計算量が $O(n)$ となることを示せ．アルゴリズムの記述には，C/C++, Java などと同様の構文または擬似コードを用いよ．アルゴリズムの基本的な内容が表現されていれば，構文の詳細にこだわる必要はない．四則演算，大小比較，代入などの整数に対する基本的な演算や操作は，値の大きさ（桁数）に関係なく一定時間で行えるものと仮定してよい．

問 12 (一般問題)

いくつかの「単位ネットワーク」からなるネットワークを考える (次ページの参考図を参照). ネットワークは，この単位ネットワークをルータを介して全体として木構造になるように相互接続することで構成される. 単位ネットワーク内では，任意のコンピュータやルータ (以下，合わせてノードと呼ぶ) 間で直接通信ができるが，異なる単位ネットワークのコンピュータ間で通信するときは，ルータによる通信の中継が必要になる.

このネットワークに接続されている各ノードに，相異なる 24 ビット (bit) 長のアドレスを次のように割り当てる.

- まず，各単位ネットワークの「共通ビット列」を次のように定める.
  - 木の根にあたる単位ネットワークの共通ビット列は空列 (長さ 0 のビット列) とする.
  - 木の根の直接の子供である単位ネットワークの共通ビット列は 000 を除く 3 ビット (001, 010, ..., 111 のいずれか) とする.
  - ある単位ネットワークの共通ビット列を長さ k のビット列 $b_1b_2...b_k$ とすると，その直接の子供である単位ネットワークの共通ビット列は $b_1b_2...b_kb_{k+1}b_{k+2}b_{k+3}$ とする. ただし，$b_{k+1}b_{k+2}b_{k+3}$ は 000 ではない.
  - 各単位ネットワークの共通ビット列は，互いに異なるとする.
- ある単位ネットワークの共通ビット列を $b_1b_2...b_k$ とすると，その単位ネットワークに接続しているノードには，$k < 21$ のとき，$b_1b_2...b_k000b_{k+4}...b_{24}$ という形のアドレスを割り当てる. $k = 21$ のときは，$b_1b_2...b_kb_{k+1}...b_{24}$ という形のアドレスを割り当てる. 例えば共通ビット列が 001001 であれば，ノードのアドレスの上位 9 ビットは 001001000 である. 共通ビット列が空列であれば，ノードのアドレスの上位 3 ビットは 000 となる.

各単位ネットワークには，最大 8 台のノードを接続できるとする. 各コンピュータはひとつの単位ネットワークにしか接続せず，ルータだけが 2 つの単位ネットワークに接続するものとする. ルータには，それぞれの単位ネットワークごとに 1 つずつ，アドレスが割り当てられる.

このようなネットワークについて，次の問いに答えよ.

(1) 通信経路の途中のルータは，次に中継する先のノードをどのような方法で決めればよいか. 上記のネットワークの特徴を活用した方法の概略を述べよ.

(2) 上記の規則の下で，できるだけ多くのコンピュータをネットワークに接続し，アドレスを割り当てられるようにするには，ネットワーク全体をどのような形の木にすればよいか述べよ. またそのときのコンピュータの台数（ルータの台数を含まない）の最大値はいくつか.

(3) 上記 (2) のネットワークにおいて，２台のコンピュータ間の通信の帯域 (bandwidth) と遅延時間 (latency time) のそれぞれについて，最大値と最小値を答えよ. ただし，同一単位ネットワーク内の通信の帯域は 1Gbps，遅延時間は無視してよいとする. また，ルータを介した通信の帯域は 100Mbps，遅延時間は 1 ミリ秒とする. また，その２台のコンピュータ以外は通信しないものとする.

参考図：アドレスの割り当て例

（ .. は 0 の列の省略）