受験される方は、必ず受験される前に志望先の教員に連絡をとって下さい。

専門科目 (午前)

19　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意

1. 専門基礎問題, 問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択 し解答せよ.
2. 専門一般問題, 問 4〜問 12 より 3 問を選択 し解答せよ.
3. 解答は 1 問ごとに 別々の解答用紙に記入 せよ.
4. 要求されたより多くの問題に解答した場合は 採点されない 可能性がある.
5. 解答用紙ごとに必ず 問題の番号および受験番号 を記入せよ.

問 1 (基礎問題)

以下の問に答えよ．ただし，E は単位行列，O は零行列を表す．

(1) S を対角成分 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ をもつ $n \times n$ 上三角行列とする．

$$S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \huge{*} \\ & & \ddots & \\ \huge{0} & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ここに，大きな 0 は対角成分より下の成分がすべて 0 であることを表し，大きな * は対角成分より上の成分が任意であることを表す．任意の n 次元列ベクトル $\boldsymbol{z}$ に対して，

$$\boldsymbol{z}_i = (S - \alpha_{n-i+1}\,E) \cdots (S - \alpha_n\,E)\,\boldsymbol{z}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

としたとき，$\boldsymbol{z}_i$ の第 $n-i+1$ 成分から第 n 成分は常に 0 であることを示せ (ヒント：i についての数学的帰納法を考えるとよい)．

(2) A を任意の $n \times n$ 正方行列，その固有値を重複を含めて $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ とする．このとき，適当な $n \times n$ 正則行列 P を用いて，$S = P^{-1}\,A\,P$ により (1) のような上三角行列 S に変換できることが知られている．(1) の結果を用いて，

$$(A - \alpha_1\,E) \cdots (A - \alpha_n\,E) = O$$

であることを示せ．

(3) m 次多項式 $f(x) = c_0\,x^m + c_1\,x^{m-1} + \cdots + c_{m-1}\,x + c_m$ $(c_0 \neq 0)$ と $n \times n$ 正方行列 A に対して，$f(A) = c_0\,A^m + c_1\,A^{m-1} + \cdots + c_{m-1}\,A + c_m\,E$ とする．$m > n$ かつ $f(A) \neq O$ であるとき，$f(A) = g(A)$ を満たし，次数が $n-1$ 以下の多項式 $g(x)$ が存在することを示せ．

問 2 (基礎問題)

以下の設問に答えよ.

(1) つぎの級数は発散することを示せ.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

(2) 任意の実数 a に対し, 1 または -1 からなる数列 $s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots$ を適当に選べば,

$$a=\frac{s_1}{1}+\frac{s_2}{2}+\frac{s_3}{3}+\frac{s_4}{4}+\cdots+\frac{s_n}{n}+\cdots$$

とできることを示せ.（ヒント： (1) の級数はどの項からはじめても発散することに注目し，数列 $\{s_n\}$ を帰納的に定義する.）

問 3 (基礎問題)

8 ビットのプロセッサを用いた演算について以下の設問に答えよ．ただし，このプロセッサは整数を表現するのに 2 の補数表現（2^8 を法とする二進表現）を用いるものとする．

(1) このプロセッサにおいて，整数の 20 と -20 のビット表現はそれぞれ `00010100` と `11101100` となる．-40 のビット表現を答えよ．

(2) 整数を表現するのに，最上位ビットで符号を表し，その他のビットで数の絶対値を表す方法も考えられる．たとえば，この方法で -20 を表すと `10010100` となる．この方法と前述の 2^8 を法とした方法を比較し，2^8 を法とした方法が優れている点を論じよ．

(3) 以下の C 言語の式（`&`はビットごとの論理積）を評価すると，このプロセッサで扱える任意の整数 $x \neq 0$ に対して，その二進表現の最右の 1 を残して他をすべて 0 とした表現を与えることを示せ．

$$x \texttt{ \& (- } x\texttt{)}$$

たとえば，x が `11101100` のとき

$$x \texttt{ \& (- } x\texttt{)} \Rightarrow \texttt{11101100 \& 00010100} \Rightarrow \texttt{00000100}$$

問 4 (一般問題)

$\mathbb{R}^2$ を 2 次元ユークリッド平面とし，C と D を $\mathbb{R}^2$ の空でない閉凸集合とする．

(1) C がコンパクトであるとき，

$$C - D = \{x - y \,:\, x \in C,\ y \in D\}$$

は閉凸集合となることを示せ．

(2) C がコンパクトでないとき，$C - D$ が閉集合にならない例をあげよ．

問 5 (一般問題)

n を自然数，$g(n)$ を n 次対称群の元の位数の最大値とする．このとき以下の設問に答えよ．

(1) $g(3)$ および $g(7)$ を求めよ．

(2) $g(n) < g(n+1)$ はいつでも成り立つか？

問 6 (一般問題)

$u(x,t)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数とする.

(1) $u(x,t)$ が波動方程式

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

をみたすならば，1 変数関数 f, g を用いて

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

と表されることを示せ.

(2) $u(x,t)$ が (1) の波動方程式をみたすならば,

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \text{任意の実数 } a,\ b \text{ に対して} \\ u(x-a,t-b) + u(x+a,t+b) = u(x+b,t+a) + u(x-b,t-a) \end{cases}$$

が成立することを示せ.

(3) 逆に，(A) をみたす $u(x,t)$ は，(1) の波動方程式をみたすことを示せ.

問 7 (一般問題)

$\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列, $\boldsymbol{b}$ を m 次元列ベクトルとして，n 次元列ベクトル変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ に関する線形等式・不等式系

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ x_j \geq 0\ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

の解 $\boldsymbol{x}$ の集合を S とする．ただし，$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ の要素はすべて実数で，^{T} はベクトルの転置を表す．以下の問に答えよ．

(1) 「S が非有界であるか否か，すなわち，$\lim_{k \to \infty} \|\boldsymbol{x}^k\| = \infty$ なる $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots$ が S 内に存在するか否か」の判定を，1 つの線形計画問題を単体法（シンプレックス法）で解くことによって，行いたい．ここで，$\|\boldsymbol{x}^k\|$ は $\boldsymbol{x}^k$ のユークリッドノルムを表す．どのような線形計画問題を構成すればよいか．その線形計画問題を示し，その問題を単体法で解くことによって，これを判定できることを説明せよ．

(2) 以下の数値例について，(1) で提案した線形計画問題を単体法で解くことにより,「S は非有界であるか否か」を判定せよ．

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2,\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ x_j \geq 0\ (j = 1, 2, 3, 4)$$

問 8 (一般問題)

確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ 上の確率変数 $\boldsymbol{X}(\omega)$, $\omega \in \Omega$, に対して，新しい確率変数 $\boldsymbol{Y}(\omega)$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{Y}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{\boldsymbol{X}(\omega)}, & \boldsymbol{X}(\omega) \neq 0 \quad \text{のとき} \\ 0, & \boldsymbol{X}(\omega) = 0 \quad \text{のとき} \end{cases}$$

このとき次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{X}(\omega)$ の分布関数を $F_X(x)$ としたとき，$\boldsymbol{Y}(\omega)$ の分布関数 $F_Y(x)$ を求めよ．ただし，点 a における関数 $F_X(x)$ の左極限 $\lim_{x\uparrow a} F_X(x)$ を $F_X(a-0)$ で表すものとする．

(2) $\boldsymbol{X}(\omega)$ の分布関数が

$$F_X(x) = \begin{cases} \rho\, e^{\alpha x}, & x < 0 \quad \text{のとき} \\ 1 - \rho\, e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \quad \text{のとき} \end{cases}$$

で与えられるとき，$\boldsymbol{Y}(\omega)$ の分布関数を具体的に書き下せ．ただし，α, ρ は，$\alpha > 0$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$ を満たすパラメータである．

(3) $a > 0$ に対して，密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}, \qquad -\infty < x < \infty$$

をもつ分布を，“パラメータ a をもつコーシー分布” と呼ぶ．$\boldsymbol{X}(\omega)$ がパラメータ a をもつコーシー分布に従うとき，$\boldsymbol{Y}(\omega)$ の密度関数 $f_Y(x)$ を求め，それが何という分布であるか答えよ．

問 9 (一般問題)

以下の表はある地域の年平均気温である．

西暦 (年)	1960	1970	1980	1990	2000
気温 (°C)	15.4	15.2	15.4	17.0	16.9

このデータから西暦 2100 年の年平均気温を予測したい．

下の設問 (1)，(2) ではこのための枠組みを議論するが，このデータでいえば $n=5$ であり，表の各列を $i=1,2,\ldots,5$ として，$x_i = (\text{西暦} - 1980)/10$，$y_i = \text{気温}$ とおく．さらに西暦 2100 年には $i=0$ と番号をつけ，$x_0 = 12$ として，この時点における気温 y_0 の予測値 $\hat{y}_0$ を求める．

以下の設問に答えよ．

(1) n 個 $(n \geq 2)$ の (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$, から

$$\hat{y}_0 = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i$$

によって予測する場合を以下で考える．ただし $w_1, w_2, \ldots, w_n$ は定数であり，その値は $x_0, x_1, \ldots, x_n$ から設問 (2) で定める．y_i は確率変数 Y_i の実現値で

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

を仮定する．β_0, β_1 は未知定数，ϵ_i は平均 0，分散 σ^2 の確率変数で $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ は互いに独立である．このとき予測気温

$$\hat{Y}_0 = \sum_{i=1}^{n} w_i Y_i$$

の期待値 $E(\hat{Y}_0)$ と分散 $V(\hat{Y}_0)$ を求めよ．

(2) 任意の β_0, β_1 において $E(\hat{Y}_0) = E(Y_0)$ となる必要十分条件を求め，その条件を満たす $w_1, w_2, \ldots, w_n$ のなかで $V(\hat{Y}_0)$ を最小にするものが

$$w_i = \frac{1}{n} + \frac{x_0 x_i}{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

であることを示せ．ただし $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ を仮定する．

(3) 設問 (1)，(2) で求めた方法を用いて，上に与えられたデータから西暦 2100 年における年平均気温の予測値 (°C) を計算せよ．

問 10 (一般問題)

アルファベット $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}$ 上の言語 A, B, C を以下のように定義する．

$A = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^m\mathtt{0}^n | n, m \geq 0\}$
$B = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n\mathtt{0}^m | n, m \geq 0\}$
$C = \{\mathtt{0}^n\mathtt{1}^n | n \geq 0\}$

これらの言語について以下の問に答えよ．

(1) 言語 A, B を生成する文脈自由文法 (注 1) をそれぞれ与えよ．

(2) 言語 A と B の交わり $A \cap B$ は文脈自由であるか? 文脈自由ならば，言語 $A \cap B$ を生成する文脈自由文法を与えるとともにその設計方針を説明し，文脈自由でないならば，言語 $A \cap B$ が文脈自由でないことをポンピング補題 (注 2) を用いて示せ．

(3) 言語 C の補集合 $\overline{C}$ は文脈自由であるか? 文脈自由ならば，言語 $\overline{C}$ を生成する文脈自由文法を与えるとともにその設計方針を説明し，文脈自由でないならば，言語 $\overline{C}$ が文脈自由でないことをポンピング補題を用いて示せ．

注 1: 以下は，言語 $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n | \ n \geq 0\}$ を生成する文脈自由文法の例である．

$$\begin{array}{rcl} X & \to & \mathtt{a}X\mathtt{b} \\ X & \to & Y \\ Y & \to & \varepsilon \end{array}$$

なお，開始変数は一番上の規則の左辺に現れる変数とする．この例では X が開始変数である．

注 2: ポンピング補題: 言語 L が文脈自由であるとき，以下のような数 p (ポンピング長) が存在する:

> s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように 5 つの部分文字列 $s = uvxyz$ に分割できる:
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $uv^ixy^iz \in L$
> 2. $|vy| > 0$
> 3. $|vxy| \leq p$

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表わし，y^i は y を i 回連結したものを表わす．y^0 は空列 ε となる．

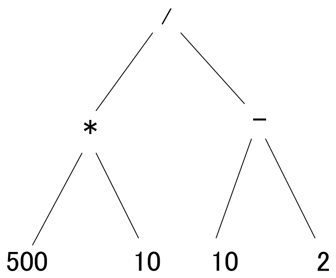
問 11 (一般問題)

整数を扱う算術式 (arithmetic expression)

`500*10/(10-2)` (A)

を考える．

算術式を解析する際には，構文木 (syntax tree) を用いることが多い．(A) の構文木は下図の通りである．以下の設問に答えよ．



(1) (A) の式を後置記法 (postfix notation) により表せ．また，算術式の構文木が与えられたとき，そこから後置記法の式を作る方法のあらましを簡単に述べよ．なお，後置記法は，逆ポーランド記法 (reverse Polish notation) とも言い，たとえば算術式「`2 - 1`」の後置記法は「`2 1 -`」である．

(2) 小問 (1) で答えた (A) の後置記法の式の値を，スタック (stack) を用いて計算する方法を示せ．簡単な説明をつけよ．参考のため，後置記法の式「`2 1 -`」の値を計算する最初の部分を示すと次のようになる．

入力	スタック (右がトップ)	説明
		初期化．スタックは空
2	2	数 2 をプッシュ
1	2　1	数 1 をプッシュ
−	(以下略)	

(3) (A) の値を計算し，演算結果をレジスタ `r1` にしまうような目的コードをアセンブリ言語形式で書け．計算の最適化はせず，(A) の計算を忠実に（乗算，減算，除算を 1 回ずつ使って）実行するような目的コードにし，また，使用するレジスタができるだけ少ないコードとせよ．

参考のため，算術式「`2 - 1`」を計算し，結果をレジスタ `r1` にしまうような目的コードは次である．

```
li    r1, 2
li    r2, 1
sub   r1, r1, r2
```

ここで用いる計算機は簡単な RISC アーキテキチャのものであって，命令として用いることができるのは，次の形のものだけとする．

命令形式	意味
`li` rA, $const$	整数定数 $const$ を rA にロードする
`add` rA, rB, rC	$rB + rC$ の結果を rA へしまう
`sub` rA, rB, rC	$rB - rC$ の結果を rA へしまう
`mul` rA, rB, rC	rB * rC の結果を rA へしまう
`div` rA, rB, rC	rB / rC の結果を rA へしまう

（注）斜体で記した rA，rB，rC は整数型のレジスタのどれかであり，具体的には `r1`〜`r15` が使えるとする．rA，rB，rC が同じレジスタでもよい．

問 12 (一般問題)

一般的なオペレーティングシステム (OS) において，アプリケーション・ソフトウェアのプログラムは，ユーザモードなどと呼ばれる動作モードでプロセッサによって実行される．これをプロセスという．一方，OS カーネルのプログラムは，特権モードあるいはスーパーバイザーモードなどと呼ばれる動作モードで実行される．

(1) ユーザモードと特権モードの違いを述べ，なぜプロセスをユーザモードで実行するのか説明せよ．

(2) カーネルが提供する機能をプロセスが呼び出すときは，実行モードをそれまでのユーザモードから特権モードへ切り替えてから，カーネル内のコードへ分岐する必要がある．ユーザモードから特権モードへ動作モードを切り替えるだけの単純な機械語命令をプロセッサに持たせると，セキュリティ上，悪用される危険性がある．悪用の具体例を示せ．

(3) 一般にカーネルが提供する機能をプロセスが呼び出すときは，割り込みをソフトウェア的に発生させる機械語命令を使う．割り込みが発生したときのプロセッサの動作を説明せよ．

(4) 一般に割り込みが発生したときは，特権モードに切り替わる．セキュリティの観点からこの機能を悪用されないようにするには，メモリの保護についても配慮が必要である．具体的に何に配慮するべきか，割り込み発生時の動作に則して説明せよ．