専門科目 (午前)　　21　大修

数理・計算科学

時間 午前 9 時 30 分 – 午後 1 時

注意事項

1. 専門基礎問題，問 1, 問 2, 問 3 より 2 問を選択 し解答せよ.
2. 専門一般問題，問 4〜問 12 より 3 問を選択 し解答せよ.
3. 解答は 1 問ごとに 別々の解答用紙に記入 せよ.
4. 解答用紙ごとに必ず 問題番号および受験番号 を記入せよ.
5. 要求された問題数を超えて解答した場合は 採点されない 可能性がある.

問 1 (基礎問題)

n 次実対称行列 S の固有値を λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$，対応する固有ベクトルをそれぞれ $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ とする．ただし $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0$ で，固有ベクトルは全て $\|\mathbf{a}_i\| = 1$ と正規化されているとする．なお，この問題ではベクトルは全て n 次元実列ベクトルで，$\mathbf{x}^T$ はベクトル $\mathbf{x}$ の転置，$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$ はベクトル $\mathbf{x}$ のノルムである．

(1) 固有ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ は互いに直交することを証明せよ．

(2) $\|\mathbf{x}\| = 1$ である全ての $\mathbf{x}$ に対する $\|S\mathbf{x}\|$ の最大値は λ_1 であることを証明せよ．

(3) $2 \leq i \leq n$ とする．$\|\mathbf{x}\| = 1$ かつ $\forall j < i$ で $\mathbf{x}^T\mathbf{a}_j = 0$ である全ての $\mathbf{x}$ に対する $\|S\mathbf{x}\|$ の最大値は λ_i であることを証明せよ．

問 2 (基礎問題)

次の広義積分が収束する実数 p, q の条件を求めよ.

$$\int_{100}^{\infty} \frac{1}{x^p(\log x)^q} dx$$

ただし，a を任意の正の数とするとき，$\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ が収束することと $p > 1$ が同値であることは証明無しで使ってよい.

問 3 (基礎問題)

言語 L のプログラムは変数に対する代入文の集合である．代入文の右辺には整数定数値，変数，二つの変数の和のいずれかが記述できる．プログラム中に現れる変数それぞれについて 1 つずつの代入文があることとする．すなわち，代入されていない変数はなく，同じ変数に対しての複数の代入文もない．

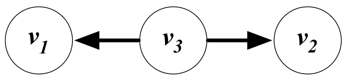
例　$v_1 = 1;\quad v_2 = v_1 + v_3;\quad v_3 = v_1 + v_4;\quad v_4 = 4;\quad v_5 = v_5 + v_6;\quad v_6 = v_5$

L における簡約計算は，プログラムから簡約可能な代入文を発見し，その右辺を計算結果の整数で置換することで進行する．ただし，簡約可能な代入文とは右辺に出現するすべての変数の値がすでに整数値に定まっているものである．たとえば，前述の例において $v_1 = 1$，$v_4 = 4$ と定まっているので，それらを参照する $v_3 = v_1 + v_4$ を $v_3 = 5$ に簡約できる．ここでの簡約によって v_3 の値が定まったために，$v_2 = v_1 + v_3$ も簡約可能になる．これを簡約して $v_2 = 6$ に置換できる．簡約計算の進行中に複数の文が簡約可能となることもあるが，簡約の順序は定まっていない．
L における簡約計算は，簡約可能な文がなくなった時点で停止し，その時点での変数に代入されている値を出力する．簡約計算の結果，値が定まらない変数については ? を出力する．前述の例の場合，以下の出力が得られる．

$$v_1 = 1,\quad v_2 = 6,\quad v_3 = 5,\quad v_4 = 4,\quad v_5 = \,?,\quad v_6 = \,?$$

以下の問に答えよ．

(1) L のプログラムにおける変数間の参照関係を有向グラフで表現する．たとえばプログラム $v_1 = 1;\quad v_2 = 2;\quad v_3 = v_1 + v_2$ における参照関係のグラフは以下のようになる．



例に挙げたプログラムにおける変数間の参照関係を有向グラフとして図示せよ．

(2) X を L の任意のプログラムとする．X の簡約計算が ? を出力しないための必要十分条件を述べよ．証明は不要である．

(3) L のプログラムは連立方程式とみなすことができる．このとき以下の条件 (a), (b), (c) を $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ に適切に当てはめると任意のプログラム X に対して

$$\boxed{\text{ア}} \Longrightarrow \boxed{\text{イ}} \Longrightarrow \boxed{\text{ウ}}$$

が成立する．

(a) X の簡約計算が ? を出力しない．
(b) X を連立方程式とみなしたとき，その連立方程式の解が存在する．
(c) X を連立方程式とみなしたとき，その連立方程式の解が一意に存在する．

$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ を (a)，(b)，(c) で埋め，$\boxed{\text{イ}} \Longrightarrow \boxed{\text{ア}}$ の反例と $\boxed{\text{ウ}} \Longrightarrow \boxed{\text{イ}}$ の反例となる L のプログラムをそれぞれ挙げよ．

問 4 (一般問題)

c は与えられた実数とし，有界な関数 $u(x,t)$ が次の初期値問題をみたすとする．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\dfrac{\partial u}{\partial x} & -\infty < x < \infty,\ t > 0, \\ u(x,0) = \sin x + \cos 2x & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

(1) $w(y,t) = u(y+ct,t)$ とおく． $w(y,t)$ のみたす微分方程式を求めよ．

(2) $u(x,t)$ を求めよ．

問 5 (一般問題)

$\mathbb{F}_3$ を三つの要素 $\{0, 1, -1\}$ からなる体とする.

(1) 多項式 $X^2 + 1$ は $\mathbb{F}_3[X]$ で既約であることを示せ.

(2) 体 $\mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$ の乗法群の元の位数として現れる数を列挙せよ.

問 6 (一般問題)

(X, d) を完備距離空間とし, X から X への写像 T が $0 \leq r < \frac{1}{2}$ となる定数 r に対し

$$d(T(x), T(y)) \leq r\{d(T(x), x) + d(T(y), y)\}, \quad {}^{\forall}x,\ y \in X$$

をみたすとする.

(1) T^n を T を n 回合成して得られる写像 $T \circ T \circ \cdots \circ T$ とするとき, 任意の $x \in X$ に対し, 点列 $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列となることを示せ.

(2) T の不動点が一意に存在することを示せ.

問 7 (一般問題)

$$
\begin{array}{rrrrl}
\text{線形計画問題 (P) 目的：} & 2x_1 & +3x_2 & \rightarrow & \text{最大化} \\
\text{条件：} & x_1 & -x_2 & \leq 1, & \\
 & x_1 & +x_2 & = 3, & \\
 & & x_2 & \leq 2, & \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0} &
\end{array}
$$

に対して，以下の問に答えよ．

(1) (x_1, x_2) 平面で実行可能領域（許容領域）を図示し，その図を用いて最適解を求めよ．

(2) 線形計画問題 (P) の双対問題を記述せよ．

(3) (2) で導いた双対問題と線形計画問題 (P) との間に成り立つ相補性定理を用いて双対問題の最適解を計算せよ．

問 8 (一般問題)

あるパーティで，n 人の参加者が各自ひとつずつプレゼントを持ち寄り，全員の分を一旦集めた後，ランダムにひとりひとつずつ配り直した．このとき，自分が用意したプレゼントを受け取ることになった参加者の数を $\boldsymbol{N}$ としよう．ただし $n \geq 2$ とする．次の問に答えよ．

(1) A_i を “i 番目の参加者が自分の用意したプレゼントを受け取る” という事象とする．$\mathrm{P}\{A_1\}$ および $\mathrm{P}\{A_1 \cap A_2\}$ はそれぞれいくらか．

(2) $\boldsymbol{N} = 0$ となる確率が次式で与えられることを示せ．

$$\mathrm{P}\{\boldsymbol{N} = 0\} = \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

(3) $\boldsymbol{N}$ の期待値を求めよ．

問 9 (一般問題)

ある商店で「おにぎり」の販売個数を調べた．i 番目の客が購入した「おにぎり」の個数を x_i として，n 人分のデータ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を観測した．平均購入数を $\bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ とおく．ただし「おにぎり」を購入しなかった客の記録は残さないので $x_i \geq 1$ である．互いに独立な n 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ の実現値が $x_1, x_2, \ldots, x_n$ であったと考えて，次の問に答えよ．

(1) まず「おにぎり」を購入しなかった客も含めて考えると，ある客が購入した個数を表す確率変数 Y は二項分布 $B(\theta, m)$ に従うとする．ただし $0 \leq \theta \leq 1$ は未知パラメータ，m は定数である．条件付き確率 $P(Y = y | Y \geq 1)$, $y = 1, 2, \ldots, m,$ を表す式を求めよ．

(2) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を与えたときの対数尤度関数 $\ell(\theta)$ を求めよ．また，最尤推定量 $\hat{\theta}$ が次式を満たすように，データによらない関数 $g(\theta)$ を求めよ．

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{m} g(\hat{\theta})$$

(3) 「おにぎり」を x 個購入した客数を n_x と表す．$m = 4$ として，$n_1 = 28$, $n_2 = 48$, $n_3 = 20$, $n_4 = 4$ が観測された．このとき，(2) で得られた $g(\theta)$ を利用して $\hat{\theta}$ を近似する系列 $\hat{\theta}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ を次式で計算する．

$$\hat{\theta}_{k+1} = \frac{\bar{x}}{m} g(\hat{\theta}_k)$$

初期値を $\hat{\theta}_0 = 1$ とおいて，$\hat{\theta}_2$ を計算せよ．

問 10 (一般問題)

アルファベット Σ 上の任意の言語 L に対して，言語 $\mathrm{twice}(L)$ を次で定義する．

$$\mathrm{twice}(L) = \{ww \mid w \in L\}.$$

たとえば，$X = \{\mathsf{aaa}, \mathsf{ab}, \mathsf{bbb}\}$ ならば，$\mathrm{twice}(X) = \{\mathsf{aaaaaa}, \mathsf{abab}, \mathsf{bbbbbb}\}$ である．

(1) $Y = (\mathsf{ab})^* = \{\varepsilon, \mathsf{ab}, \mathsf{abab}, \mathsf{ababab}, \ldots\}$ のとき，$\mathrm{twice}(Y)$ が正規であることを示せ．ただし ε は空列である．

(2) L が正規で $\mathrm{twice}(L)$ が正規でないような言語 L の具体例をあげ，$\mathrm{twice}(L)$ が正規でないことをポンピング補題を用いて示せ．

(3) アルファベットが 1 文字，たとえば $\Sigma = \{\mathsf{a}\}$ のときには，言語 L が正規ならば必ず $\mathrm{twice}(L)$ も正規であることを証明せよ．

【注１】 言語 L が正規であることを示すには，L を表す正規表現を示したり，L を認識する有限オートマトンを示せばよい．たとえば，以下はアルファベット $\{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ 上の言語 $\{w \mid w$ は a で始まる長さ奇数の文字列 $\}$ を表す正規表現である．

$$\mathsf{a}(\mathsf{aa} \cup \mathsf{ab} \cup \mathsf{ba} \cup \mathsf{bb})^*$$

【注２：ポンピング補題】 言語 L が正規であるならば，以下のような数 p（ポンピング長）が存在する．

> s が $|s| \geq p$ であるような L の任意の文字列であるとき，s は次の条件を満たすように三つの部分 $s = xyz$ に分割できる．
>
> 1. 各々の $i \geq 0$ に対して $xy^iz \in L$.
> 2. $|y| > 0$.
> 3. $|xy| \leq p$.

ただし，$|s|$ は文字列 s の長さを表し，y^i は y を i 回連結したものを表す．y^0 は ε である．

問 11 (一般問題)

原点 $(0,0)$ を出発点として，2 次元格子 $[0,R-1]\times[0,R-1]$ を巡る仮想ロボットの動きを追うことを考える．このロボットへの動きの指示を，E, W, S, N の記号の列で与えることにし，その記号の列を「指示列」と呼ぶことにする．各記号 E, W, S, N は，各々，現在地から東へ（x 座標を $+1$ する方向へ），西へ（x 座標を -1 する方向へ），南へ（y 座標を -1 する方向へ），北へ（y 座標を $+1$ する方向へ）進めという指示を表わしている．たとえば，指示列 $w=$ ENENWWS は，原点から出発して，東北東北西西南に進む指示を与える列であり，その結果，ロボットの位置は $(0,1)$ になる．
変数 u に与えられている長さ N の指示列に従い動いたときに，すでに通った点を再度通るかを調べる問題を考える．その問題に対するアルゴリズムの一例として，以下にアルゴリズム simple の概略を示す（変数は適宜宣言されているものとする）．

```
procedure simple (u: 指示列) {
  for (i ← 0 ~ R − 1) {
    for (j ← 0 ~ R − 1) {
      A[i][j] = 0;
    }
  }
  x = 0; y = 0;
  while (u に指示列が残っている) {
    u より，新たな指示文字 c を読み込む ;
    if( c = 'E' ) x ← x + 1;
    else if( c = 'W' ) x ← x - 1;
    else if( c = 'S' ) y ← y - 1;
    else if( c = 'N' ) y ← y + 1;
    else 「入力エラー」と出力し停止 ;
    if( A[x][y] ≠ 0 ) 「前に通った」と出力し停止 ;
    A[x][y] = 1;
  }
}
```

この問題ならびにアルゴリズムに関する以下の問に答えよ．なお，解答では，動く途中で $[0,R-1]\times[0,R-1]$ から外に出るような指示列は与えられないと仮定してよい．

(1) アルゴリズム simple には，パラメータ R と N の大きさによっては，領域計算量，時間計算量の問題点が現れる場合がある．この状況例と問題点を示せ．

(2) 上記の問題点（の全部または一部）を解決するアルゴリズムを 2 種類考え，その概略を示し，各々，アルゴリズム simple と比べ，計算量の観点から問題点がどのように改善されるかを述べよ．

問 12 (一般問題)

次の［プログラム 1］のような簡単なプログラミング言語をコンパイルすることを考える．
［プログラム１］

```
x = 10;              （代入文）変数 x に 10 を代入
y = x-1;             （代入文）変数 y に x-1 つまり 9 を代入
print 20-(x+y);      （出力文）式 20-(x+y) の値である 1 を出力
```

この言語のトークンとしては次のものがある：i（変数で，英字１文字からなる），n（整数），print（出力を表す予約語），=（代入を表す），+（和を表す２項演算子），-（差を表す２項演算子），「(」，「)」，「;」．余分な空白や改行は意味をもたない．（式に使える演算子は上で述べたものだけで，* や / はないとする．）

文には代入文と出力文の２種類がある．代入文は「変数 = 式;」の形である．出力文は「print 式;」の形であって式の値を出力する．

このプログラミング言語については細かい仕様が決まっていない所があるかもしれない．したがって，以下のすべての問について適当に仮定を設けて答えてよいが，その場合には仮定を明記せよ．

(1) 上のプログラミング言語の文法のうち，出力文に関する部分は次のように書ける．$\boxed{}$ 内を埋めよ．

$$\mathrm{P} \to \texttt{print}\ \mathrm{E}\ ;$$
$$\mathrm{E} \to \boxed{} \mid \boxed{} \mid \mathrm{F}$$
$$\mathrm{F} \to (\ \mathrm{E}\ ) \mid \underline{\mathrm{i}} \mid \underline{\mathrm{n}}$$

ここで，i，n，print，=，+，-，(，)，; は終端記号である．

(2) 出力文「print 20-(x+y);」について，上記の文法のＰから始まる構文規則を用いてＰを根とする構文解析木を描け．また，print，+，-を演算子だとみなして，この出力文のうちの「print 20-(x+y)」の部分の抽象構文木を描け．ちなみに，抽象構文木は構文木とも呼ばれ，節として演算子，節の子供として節の演算子のオペランドがくるようにした木である．

(3) 出力文のうちの「print 20-(x+y)」の部分を後置記法で記述せよ．さらにこの後置記法による記述を問 (2) の抽象構文木から作る方法を記せ．ここでも print，+，- を演算子だとみなす．ちなみに「2 - 1」の後置記法は「2 1 -」である．

(4) 冒頭の［プログラム１］に対する目的コード（アセンブリコード）を出したい．次の例を参考にして，［プログラム１］の目的コードを書け．<u>最適化はしないこと</u>．

［例］

同じプログラミング言語のソースプログラム

```
x = 1+2;
print x-2;
```

この目的コード：

```
LI    R1,1          /* R1 = 1  */
LI    R2,2          /* R2 = 2  */
ADD   R1,R1,R2      /* R1 = R1 + R2  */
STW   R1,x          /* x  = R1 */
LW    R1,x          /* R1 = x  */
LI    R2,2          /* R2 = 2  */
SUB   R1,R1,R2      /* R1 = R1 - R2 */
BL    PRINT         /* R1の内容を印刷 */
```

手続き PRINT はレジスタ R1 の内容を印刷するものとする．参考までに，上の［プログラム１］の最適化された目的コードは次になるが，この設問では最適化しない目的コードを問うているので，次を真似しないこと：

```
LI    R1,1          /* R1 = 1  */
BL    PRINT         /* R1の内容を印刷 */
```

ここで用いたアセンブリ言語のあらましは次のとおりである．下の表で斜体で書いた *R1* や *R2* や *R3* などは，実際にある整数レジスタ R1 から R31 のどれかである．*R1* や *R2* や *R3* が実際は同じレジスタになってもよい．

命令形式	意味
LI *R1*,*const*	正や０や負の定数 *const* を *R1* にロードする
LW *R1*,*address*	*address* 番地の内容を *R1* にロードする
STW *R1*,*address*	*R1* を *address* 番地へストアする
ADD *R1*,*R2*,*R3*	*R2* + *R3* の結果を *R1* へしまう
SUB *R1*,*R2*,*R3*	*R2* - *R3* の結果を *R1* へしまう
BL *address*	R1 をパラメタとして *address* 番地の手続きを呼び出す