

専門科目 (午前)
数理・計算科学

22 大修

時間 午前9時30分 – 午後1時

注意事項

1. 専門基礎問題，問1, 問2, 問3 より 2問を選択し解答せよ．
2. 専門一般問題，問4～問12 より 3問を選択し解答せよ．
3. 解答は1問ごとに 別々の解答用紙に記入せよ．
4. 解答用紙ごとに必ず 問題番号および受験番号を記入せよ．
5. 要求された問題数を超えて解答した場合は 採点されない可能性がある．

問 1 (基礎問題)

n を 2 以上の整数とし、以下に現れるすべての行列の成分は実数値をとるものとする。 $n \times n$ 対称行列 S は、零ベクトルでない任意の n 次元列ベクトル x に対して $x^T S x > 0$ を満たすとき、正定値であるという。ここで T は転置を表す。また、任意の正定値対称行列 S に対して、 $H^2 = S$ を満たす正定値対称行列 H が一意に存在することが知られている。 A を任意の $n \times n$ 正則行列として以下の問に答えよ。

- (1) $S = A^T A$ が対称行列であり、かつ正定値であることを示せ。
- (2) (1) の S に対して、行列 H を $H^2 = S$ を満たす正定値対称行列とする。行列 U を H の逆行列 H^{-1} を用いて $U = A H^{-1}$ とするとき、 U が直交行列であることを示せ。
[ヒント: 正則な対称行列の逆行列は対称である。]
- (3) ある正定値対称行列 K と直交行列 V が $A = V K$ を満たすとすると、 K と V はそれぞれ (2) の H と U に他ならないことを示せ。

問 2 (基礎問題)

(1) 次の不定積分を求めよ .

$$\int \frac{\log x}{(1+x)^3} dx$$

(2) 次の広義積分を求めよ .

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} dx$$

問 3 (基礎問題)

A を空でない集合， \prec を A 上の 2 項関係とする． x, y, z などは A の要素を表す変数とし， $x \prec y$ でないことを $x \not\prec y$ と表記する．以下では \prec の性質を論理式で表現する．たとえば \prec が推移的であることは

$$\forall x \forall y \forall z \left((x \prec y) \wedge (y \prec z) \Rightarrow (x \prec z) \right) \quad (*)$$

と表せる．ただし「 $\forall, \wedge, \Rightarrow$ 」はそれぞれ「すべての，かつ，ならば」を表す論理記号である．

- (1) \prec が推移的でないことを否定の論理記号を使わない論理式で表せ．つまり (*) に現れている「変数，括弧， $\prec, \forall, \wedge, \Rightarrow$ 」といった記号の他に「 $\not\prec, \exists$ (ある), \vee (または)」を使用してもよいが，否定を表す論理記号 (たとえば「 \neg 」) は使用せずに，(*) の否定を意味する論理式を書け．
- (2) 次の条件が満たされることを「 \prec は継続的である」という．

$$\forall x \exists y (x \prec y)$$

A の要素数が 2 で，推移的でなく，かつ継続的であるような \prec の具体例をひとつ挙げよ．

- (3) 次の条件が満たされることを「 \prec は非反射的である」という．

$$\forall x (x \not\prec x)$$

\prec が推移的かつ継続的かつ非反射的であるならば，必ず A は無限集合であることを証明せよ．

問 4 (一般問題)

C^1 級関数 $u(t, x)$, ($t \geq 0, x \in \mathbb{R}$) が

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \cos(t + x) \\ u(0, x) = 0 \end{cases}$$

を満たすとする .

- (1) $\xi = t + x, \eta = t - x$ とおき , 上記の微分方程式を ξ, η に関する微分方程式として表せ .
- (2) $u(t, x)$ を求めよ .

問 5 (一般問題)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ を自然数の集合とする． $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の関係 \sim を， $(a, b), (a', b') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ に対し

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a + b' = a' + b$$

と定義する．このとき次を示せ．

(1) \sim は同値関係である．

(2) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の演算

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

は， $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ 上の群演算を導く．

(3) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ は加法群 $(\mathbb{Z}, +)$ に同型である．ただし \mathbb{Z} は整数の集合である．

問 6 (一般問題)

H を実ヒルベルト空間, T を恒等的に 0 ではない H 上の有界線形汎関数とする. ここで H 上の有界線形汎関数とは, H から \mathbb{R} への線形写像 T で, ある正の実数 k が存在して

$$|T(x)| \leq k\|x\| \quad (\forall x \in H)$$

を満たすものを意味する. なお, $\|\cdot\|$ は H のノルム, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は H の内積を表す.

- (1) 集合 $N = \{x \in H; T(x) = 0\}$ は H の閉部分空間となることを示せ.
- (2) 集合 $N^\perp = \{y \in H; \langle y, x \rangle = 0 \ (\forall x \in N)\}$ は H の閉部分空間となることを示せ.
- (3) N^\perp の次元が 1 であることを示せ. ただし, N^\perp はゼロベクトルのみの集合ではないことは, 証明なしで用いてよい.

問 7 (一般問題)

ある定数 c を含んだ以下の線形計画問題をシンプレックス法で解きたい。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & cx_1 + 4x_2 - 6x_3 \\ \text{subject to} & -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 3 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(x_3 には非負条件 “ $x_3 \geq 0$ ” がついていないことに注意せよ)。

以下の問に答えよ。

- (1) この線形計画問題を基準形または標準形の線形計画問題に変換せよ。
- (2) $c \leq -10$ と仮定して、この問題をシンプレックス法で解き、最適値と最適解を求めよ。
- (3) この問題が有界な最適値をもつ c の範囲を、シンプレックス法を利用して求めよ。

問 8 (一般問題)

確率変数 X, Y の同時確率密度関数が次のように与えられている。

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}(1 + 2x + 2y), & 0 \leq x, y \leq 1 \text{ のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

このとき次の確率や期待値，分散などを計算せよ。

- (1) X の周辺確率密度関数 $f_X(x)$
- (2) X の期待値 $E(X)$ と分散 $V(X)$
- (3) X と Y の共分散 $\text{Cov}(X, Y)$ および 相関係数 $\rho(X, Y)$
- (4) $X + Y$ の分散 $V(X + Y)$
- (5) 確率 $P\{X + Y \leq 1\}$

問 9 (一般問題)

流行中のある感染症の保菌者の割合を推定するため、感染の有無を検査したところ、無作為に選んだ N 人中 M 人が陽性 (保菌者と推測される) であった。ただしこの検査は誤診の可能性があり、次の条件付き確率で与えられる 2 種類の誤診率を考慮する必要がある：

$$q = \mathbf{P}\{A^c \mid B\}, \quad r = \mathbf{P}\{A \mid B^c\}.$$

ここで

A = 被検者が陽性である事象,
 B = 被検者が保菌者である事象

であり、 A^c, B^c はそれぞれの余事象である。過去の経験から q, r は既知であり、また十分小さく $r < M/N < 1 - q$ が成り立つとして良い。 $p = \mathbf{P}\{B\}$ と置く。

- (1) 事象 $A \cap B$ (陽性で保菌者), $A \cap B^c$ (陽性で非保菌者), $A^c \cap B$ (陰性で保菌者), $A^c \cap B^c$ (陰性で非保菌者), の確率をそれぞれ p, q, r で表せ。
- (2) 陽性である理論確率と標本確率を等しいと置いた式 $\mathbf{P}\{A\} = M/N$ を p について解いて得られる (モーメント) 推定量 \hat{p} を求めよ。
- (3) このデータに対する p の最尤推定量 \hat{p}_{MLE} を求めよ。

問 10 (一般問題)

アルファベット

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

上の言語を考える．ここで，アルファベット Σ 上の文字列 w を

$$w = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

としたとき， w の一番上の行とは文字列 $a_1 a_2 \cdots a_n$ を， w の真ん中の行とは文字列 $b_1 b_2 \cdots b_n$ を， w の一番下の行とは文字列 $c_1 c_2 \cdots c_n$ をそれぞれ指すこととする．

(1) 言語

$$A = \{w \mid w \text{ の一番上の行は一番下の行の逆文字列}\}$$

とする．ただし A は空列を含む．たとえば $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in A$ で

ある．なぜならば“01100”は“00110”の逆文字列だからである．ポンピング補題を用いて A が正規でないことを示せ．

(2) 言語 A を生成する文脈自由文法 (注 1) を与えよ．

(3) アルファベット Σ 上の文字列 w の各行を 2 進数とみなす．言語

$$B = \{w \mid w \text{ の一番上の行と真ん中の行の和が一番下の行}\}$$

とする．ただし B は空列を含む．また各行の先頭には 0 が並んでもよい．たとえば

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in B \text{ であるが, } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \notin B \text{ である. } B \text{ を認識する}$$

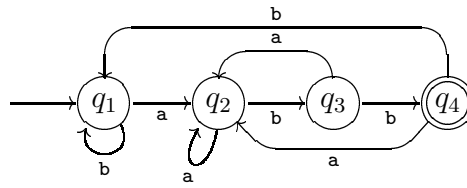
決定性有限オートマトンの状態遷移図 (注 2) を与えよ．

注 1: 以下は，アルファベットが $\{a, b, c\}$ であるような言語 $\{w \mid w \text{ は } a \text{ で始まり } b \text{ を含み } c \text{ で終わる}\}$ を生成する文脈自由文法の例である．

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow aA \\ A &\longrightarrow aA \mid bB \mid cA \\ B &\longrightarrow aB \mid bB \mid cB \mid cC \\ C &\longrightarrow \epsilon \end{aligned}$$

注 2: 以下は，アルファベットが $\{a, b\}$ であるような言語 $\{w \mid w \text{ は } abb \text{ で終わる}\}$ を認識する決定性有限オートマトンの状態遷移図の例である．開始状態は q_1 ，受理

状態の集合は $\{q_4\}$ である。



問 11 (一般問題)

セルへの参照を値とするプログラミング言語 M において、プログラムは変数宣言文の列とそれに続く代入文の列から構成される。ただし、プログラムで使用される変数は必ず 1 回だけ宣言することとする。

変数宣言	$x = \text{cell}();$	新しいセルを生成し、それへの参照を変数 x の初期値とする。セルも他のセルへの参照を値にとるが変数宣言時に作られた新しいセルはなにも参照しない。
変数への代入	$x := y;$	変数 x に変数 y の値を代入する。
セルへの代入	$*x := y;$	変数 x が参照するセルに変数 y の値を代入する。たとえば x と y がそれぞれセル c_x と c_y を参照し、 c_x がセル c を参照していたときに、 $*x := y$ を実行すると、 c_x は c の代わりに c_y を参照するようになる。

M はプログラムのなかの文を順次実行するものとする。以下の (1) ~ (3) に答えよ。

- (1) 以下のプログラムを実行し終えた時点でいずれの変数からも直接的に、あるいは間接的に参照できないセルを過不足なく列挙し、それらが参照できない理由を説明せよ。

```
a = cell(); b = cell(); c = cell(); d = cell();
*a := d; a := b; *b := c; *c := a; *a := d;
```

解答にあたってはセルを識別するために、そのセルを初期値とした変数名を c の添字につけて表せ。たとえば、上述のプログラムにおいて変数 a の初期値となったセルは c_a と名づけられる。

- (2) M の処理系でメモリ管理をするために、各セルに非負整数値をラベルづけ、命令を実行するとき以下の処理を行うこととする。

変数宣言 ($x = \text{cell}();$)

- 1 をラベルとする新しいセルを生成し、それへの参照を x の初期値とする。

変数への代入 ($x := y;$)

- y が参照するセルのラベルを 1 だけ増加する。
- x が参照するセルのラベルを 1 だけ減ずる。
- x に y の値を代入する。

セルへの代入 ($*x := y;$)

- y が参照するセルのラベルを 1 だけ増加する。
- x が参照するセル c_x がセル c を参照していたなら、 c のラベルを 1 だけ減ずる。 c_x がセルを参照していない場合にはなにもしない。
- x が参照するセルに y の値を代入する。

ラベルが 0 になったとき セル c のラベルが 0 になり、さらに c が他のセル c' を参照していたなら、 c' のラベルを 1 だけ減ずる。

このメモリ管理処理を用いて (1) のプログラムを実行し終えた状態で、変数とセルをノードとし、セルの参照関係を有向辺とする有向グラフ (セルグラフ) を描け。変数を表すノードには変数名を、セルを表すノードにはラベルの値を記入せよ。

- (3) (2) のメモリ管理方式を採用した上で、 M の任意のプログラムを実行することを考える。プログラムが停止した時点で「正のラベルを持つセルの集合」と「セルグラフにおいて、変数ノードからのパスが存在するセルノードの集合」は一致するか。一致すると考える場合は説明を与えよ。そうでない場合は反例となるプログラムを挙げ、両者が一致しない理由を説明せよ。

問 12 (一般問題)

仮想アドレス空間を実現するためにページング機構を備えたプロセッサが一般的である。これについて以下の問いに答えよ。解答にあたって、全てのページはメモリ上にあるものとせよ。また 1KB は 1024 bytes, 1MB は 1024KB とする。

- (1) ページング機構を使うと、external fragmentation を避けることができる。この external fragmentation とは何か答えよ。
- (2) 今、ページサイズとして 4KB と 4MB のどちらかを選べたとする。どちらのページサイズの方が TLB (Translation Look-aside Buffer) のミス率が小さくなると予想できるか答えよ。また、それを選んだ場合の欠点も述べよ。
なお TLB の大きさと利用するメモリ量は一定で変わらないとする。ただし利用するメモリ量は 4MB 以上で、メモリ・アクセスはまんべんなく発生するとする。
- (3) 32 bit のアドレス空間のための 2 段階ページング (2-level paging) 機構を考える。論理アドレスを上位から 10bits, 10bits, 12bits に分割し、それぞれ 1 段目, 2 段目のページテーブルのインデックス, ページ内のオフセットとして用いる。ページテーブルの各項目 (entry) は 4 bytes であるとする。またメモリのアドレスは 1 byte (= 8bit) 単位であるとする。
 - (3-a) この場合、ページサイズは何 KB であるか。
 - (3-b) プログラムが利用するメモリ量が合計 200MB であるとき、2 段目のページテーブルに必要なメモリ量の最大値と最小値を答えよ。また、そうなる状況を具体的に説明せよ。
ただし、プログラムはアドレスが連続しないメモリ領域を利用することもあるとする。メモリの割り当てが不要な論理ページについては、ページテーブルの項目が空であるとする。ページテーブルの全ての項目が空なら、そのページテーブル全体は不要になる。逆に、空でない項目が 1 つでもあれば、そのページテーブル全体が必要になる。